

वास्तविक संख्याएँ

① यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका :

दो चनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान हैं कि

$$a = bq + r ; \quad 0 \leq r < b \text{ हैं।}$$

② किन्हीं 2 चनात्मक पूर्णांक a और b के लिए,

$$\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$$

③ परिमेय संख्याएँ :

★ ऐसी संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जा सकता हो उन्हें परिमेय संख्याएँ कहा जाता है (जहाँ p व q सहअभाज्य हैं)

★ परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार या तो "सांत दशमलव प्रसार" होता है या फिर "असांत आवर्ती दशमलव प्रसार" होता है।

(a) परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का दशमलव प्रसार सांत दशमलव प्रसार कहलाता है यदि, q के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n \times 5^m$ रूप के हों।

(b) परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती दशमलव प्रसार कहलाता है यदि, q के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n \times 5^m$ रूप के ना हों।

बहुपद

① $P(x) \rightarrow$ बहुपद

बहुपद की घात \rightarrow बहुपद $P(x)$ में x की उच्चतम घात बहुपद की घात कहलाती है।

रेखिक बहुपद $\rightarrow x$ की उच्चतम घात = 1

बिघात बहुपद $\rightarrow x$ की उच्चतम घात = 2

त्रिघात बहुपद $\rightarrow x$ की उच्चतम घात = 3

② किसी बहुपद के शून्यांकों एवं गुणोंकों में संबंध:

माना बहुपद $ax^2 + bx + c$ है तथा इसके

शून्यांक α एवं β हैं तो,

शून्यांकों का योग, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

शून्यांकों का गुणनफल, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

③ यदि बहुपद के शून्यांक α व β दिए हों तो

$$\text{बहुपद} \Rightarrow k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

④ विभाजन एल्गोरिथ्म :

यदि $p(x)$ व $g(x)$ कोई 2 बहुपद हैं जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि,

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

दो चर वाले रैखिक समीकरण प्रणम

- ① वट समीकरण जिसे $ax + by + c = 0$ के रूप में लखत क्रिया जा सकता है , उसे दो चर वाला रैखिक समीकरण कहा जाता है।
- ② सनी दो चर वाले रैखिक समीकरण "सरल रेखा" को निरूपित करते हैं।
- ③ यदि दो सरल रेखाओं के समी. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ व $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ हो तो \rightarrow
 - (a) प्रतिच्छेदी रेखाएं / संगत प्रणम / अद्वितीय हल होने की शर्त \rightarrow

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$
 - (b) संपाती रेखाएं / संगत प्रणम / अपरिमित रूप से अनेक हल होने की शर्त \rightarrow

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$
 - (c) समान्तर रेखाएं / असंगत प्रणम / कोई हल नहीं होने की शर्त \rightarrow

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$
- ④

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{नाव (x km/h)}} \\ \xrightarrow{\text{नदी (y km/h)}} \end{array}$$

नाव की धारा के अनुकूल
चाल = $(x+y)$ km/h

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{नाव (x km/h)}} \\ \xleftarrow{\text{नदी (y km/h)}} \end{array}$$

नाव की धारा के प्रतिकूल
चाल = $(x-y)$ km/h
- ⑤ समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

डिघात समीकरण

① $ax^2 + bx + c = 0$ रूप की सभी समीकरण डिघात समीकरण कहलाती हैं यदि x^2 का गुणांक शून्य ना हो ($a \neq 0$)

② डिघात समीकरण के शून्यांक = डिघात समीकरण के मूल

③ डिघात समीकरण को हल करने की विधियाँ →

(a) गुणनखंड विधि

(b) पूर्ण वर्ग बनाने की विधि

(c) डिघाती सूत्र / श्रीचराचार्थ सूत्र :-

$$\text{समी.} \rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{हल} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac \quad (D \rightarrow \text{विविक्तकर})$$

④ मूलों की प्रकृति :-

(a) दो भिन्न वास्तविक हल होंगे, यदि $b^2 - 4ac > 0$

(b) दो समान वास्तविक हल होंगे, यदि $b^2 - 4ac = 0$

(c) कोई वास्तविक हल नहीं होगा, यदि $b^2 - 4ac < 0$

समान्तर श्रेणी

① समान्तर श्रेणी \rightarrow

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots + [a+(n-1)d]$$

a = प्रथम पद

d = सार्वन्तर

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$$

② n वाँ पद / अन्तिम पद \rightarrow

$$l \text{ चा } a_n = a + (n-1)d$$

③ n पदों का योग, $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

$$\underline{\underline{\text{या } S_n = \frac{n}{2} (a+l)}}$$

④ यदि AP के **तीन पदों का योग** दिया हो तो हम वे तीन पद मानेंगे $\Rightarrow a-d, a, a+d$

⑤ यदि AP के **चार पदों का योग** दिया हो तो हम वे चार पद मानेंगे $\Rightarrow a-3d, a-d, a+d, a+3d$

⑥ यदि 3 संख्याएँ a, b व c AP में हों तो \Rightarrow
$$b-a = c-b \quad \underline{\underline{\text{या } b = \frac{a+c}{2}}}$$

यहाँ ' b ' को a व c का समान्तर माध्य कहा जाता है।

⑦ अंत से **k वाँ पद** = प्रारम्भ से **$(n-k+1)$ वाँ पद**

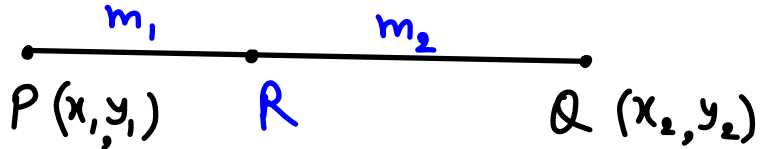
निर्देशांक ज्यामिति

① दूरी सूत्र :-



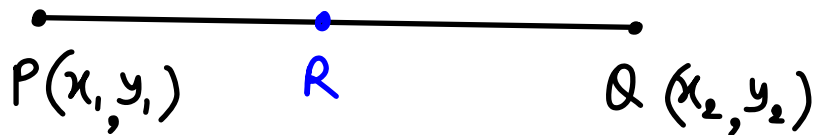
$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

② विभाजन सूत्र :-



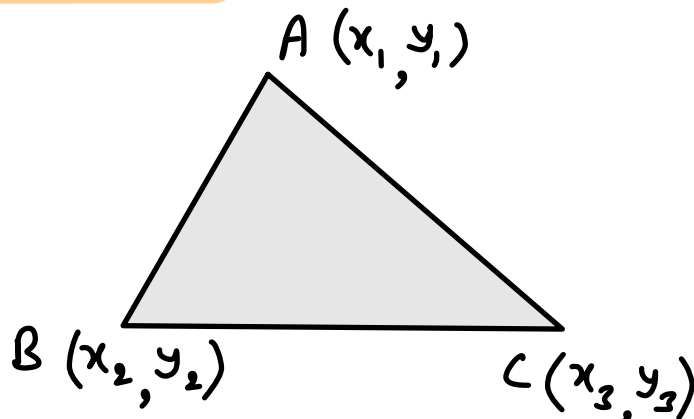
$$\text{बिन्दु } R \text{ के निर्देशांक} = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

③ मध्य बिन्दु सूत्र :-



$$\text{मध्य बिन्दु } R \text{ के निर्देशांक} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

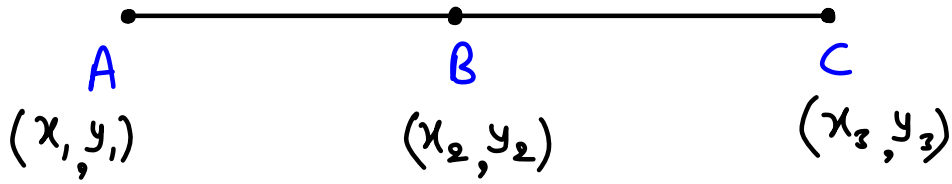
④ त्रिभुज का क्षेत्रफल :-



$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

5

संरेखता की शर्त :-



तीन बिंदुओं (A, B और C) के संरेख होने की शर्त \rightarrow

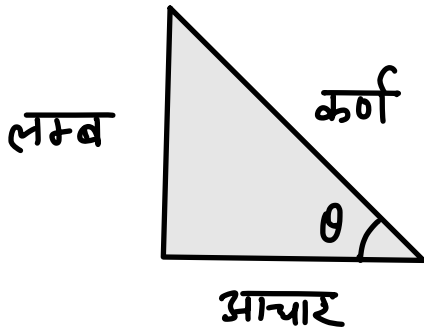
$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

त्रिकोणमिति का परिचय

① त्रिकोणमितीय अनुपात :-



$$(a) \sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$(d) \cot \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

$$(b) \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$(e) \sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$$(c) \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$(f) \operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

② त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

③ (a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

(b) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

(c) $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$$\textcircled{4} \quad (a) \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$(b) \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\textcircled{5} \quad (a) \quad \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$$

$$(d) \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$(b) \quad \cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$(e) \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$(c) \quad \tan A = \frac{1}{\cot A}$$

$$(f) \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\textcircled{6} \quad \sin (90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos (90^\circ - A) = \sin A$$

$$\tan (90^\circ - A) = \cot A$$

$$\cot (90^\circ - A) = \tan A$$

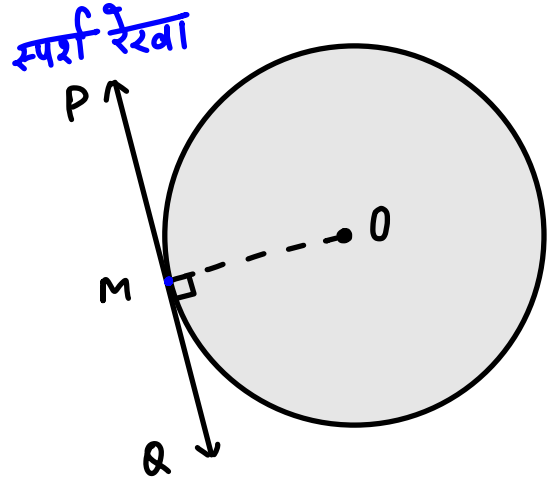
$$\sec (90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec} (90^\circ - A) = \sec A$$

वृत्त (Circles)

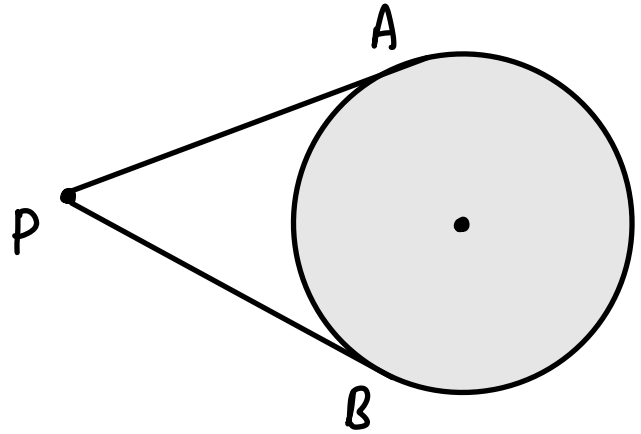
- ① वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होता है।

$$\Rightarrow OM \perp PQ$$



- ② बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

$$\Rightarrow PA = PB$$



वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

① वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

[$r \rightarrow$ वृत्त की त्रिज्या]

② वृत्त की परिधि = $2\pi r$

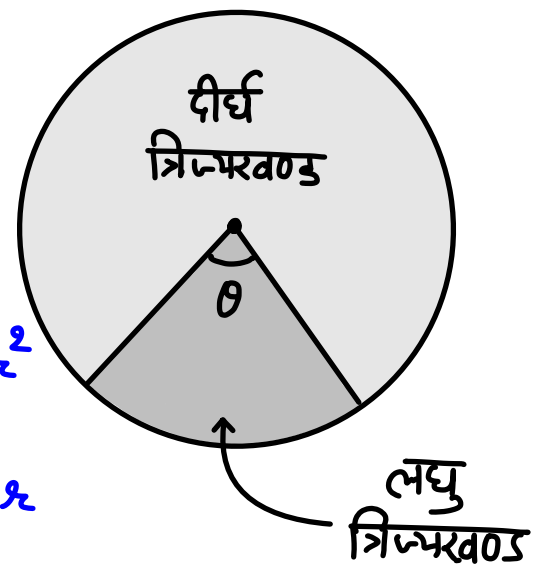
③ त्रिज्यखण्ड (Sector) :-

लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

लघु त्रिज्य खण्ड की लम्बाई = $\frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$

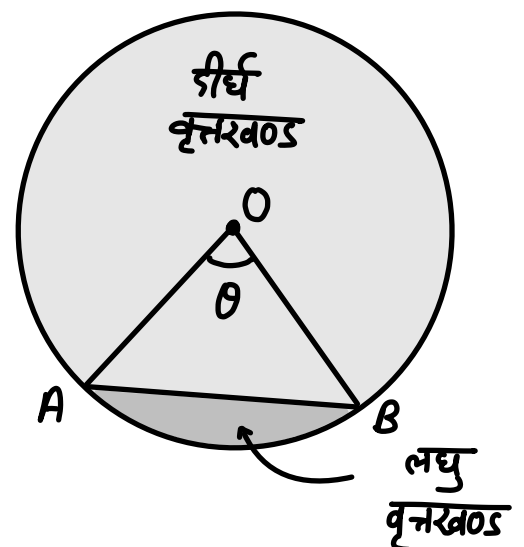
दीर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{360^\circ - \theta^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

दीर्घ त्रिज्य खण्ड की लम्बाई = $\frac{360^\circ - \theta^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$



④ वृत्तखण्ड (Segment) :-

वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल - त्रिभुज का क्षेत्रफल



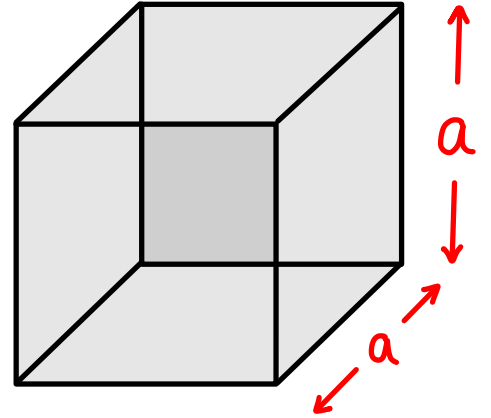
पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

① घन (Cube) :-

बुला की लम्बाई = a

पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

आयतन = a^3

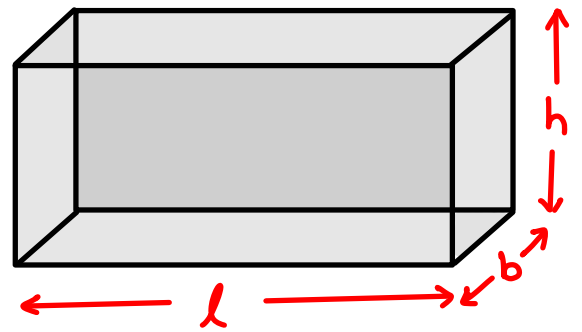


② घनाभ (Cuboid) :-

लम्बाई = l , चौड़ाई = b , ऊँचाई = h

पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + lh)$

आयतन = lbh



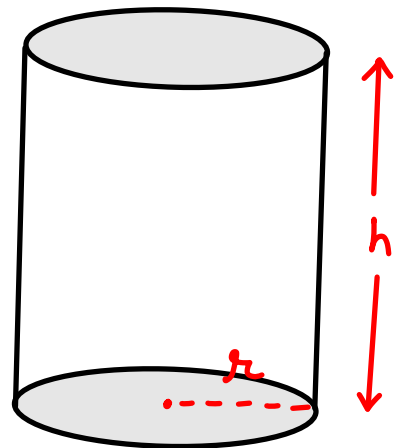
③ बेलन (Cylinder) :-

त्रिज्या = r , ऊँचाई = h

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$

सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh + 2\pi r^2$

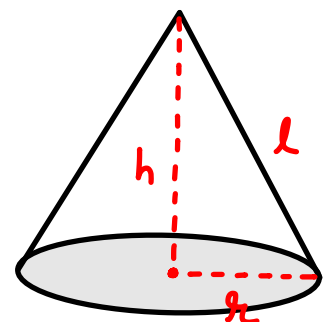
आयतन = $\pi r^2 h$



④ शंकु (Cone) :-

त्रिज्या = r , ऊँचाई = h , तिर्यक ऊँचाई = l

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = πrl



$$\text{सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l + \pi r^2$$

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$r^2 + h^2 = l^2$$

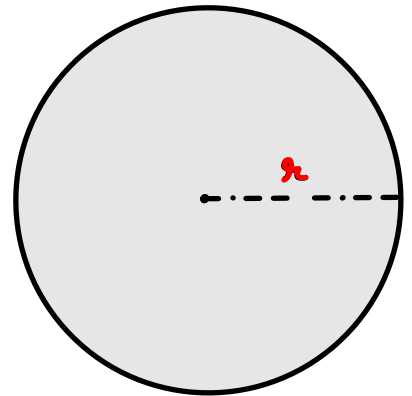
5

गोला (Sphere) :-

गोले की त्रिज्या = r

$$\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

$$\text{आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3$$



6

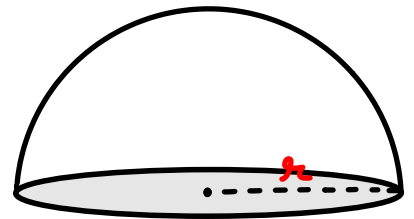
अर्द्धगोला (Hemisphere) :-

अर्द्ध गोले की त्रिज्या = r

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r^2$$

$$\text{सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 3\pi r^2$$

$$\text{आयतन} = \frac{2}{3} \pi r^3$$



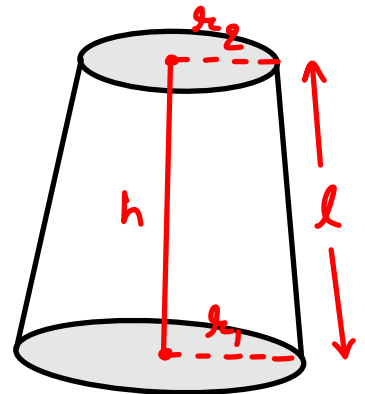
7

शंकु का फिन्नि (Frustum of cone) :-

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi (r_1 + r_2) l$$

$$\text{सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi (r_1 + r_2) l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h$$



$$l^2 = (r_1 - r_2)^2 + h^2$$

$$r_1 > r_2$$

सांख्यिकी

① माध्य (Mean) :-

(a) प्रत्यक्ष विधि :-

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$x \rightarrow$ आंकड़े

$f \rightarrow$ बारम्बारता

(b) कल्पित माध्य विधि :- $\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$A \rightarrow$ कल्पित माध्य

प्रहाँ, $[d = x - A]$

(c) पग - विचलन विधि :-

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum fu}{\sum f} \right) \times h$$

$h \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

प्रहाँ, $\left[u = \frac{x - A}{h} \right]$

② बहुलक (Mode) :-

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$l \rightarrow$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

$h \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

$f_1 \rightarrow$ बहुलक वर्ग की बारम्बारता

$f_0 \rightarrow$ बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता

$f_2 \rightarrow$ बहुलक वर्ग से ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता

③

माध्यक (Median) :-

(a) अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक :-

यदि n विषम हो तो, माध्यक = $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ term}$

यदि n सम हो तो, माध्यक = $\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{th}} \text{ term} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{th}} \text{ term}}{2}$

(b) वर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक :-

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - CF}{f} \right) \times h$$

$l \rightarrow$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

$n \rightarrow$ प्रेक्षकों की संख्या

$CF \rightarrow$ माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संयोजी बारम्बारता

$f \rightarrow$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता

$h \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

④

माध्य, बहुलक और माध्यक में संबंध \rightarrow

$$3 (\text{माध्यक}) = \text{बहुलक} + 2(\text{माध्य})$$